

力武ダイナモのカオス制御 —地球磁場逆転の解明に向けて—

平田 隆幸* 原田 義文*

Controlling Chaos of the Rikitake Two-Disk Dynamo — Implication for the Reversals of the Earth's Magnetic Field —

Takayuki HIRATA and Yoshifumi HARADA

(Received Aug. 31, 1998)

Controlling chaos of the Rikitake two-disk dynamo was investigated from the viewpoint of the reversals of the earth's magnetic field. The term of the delayed feedback was added to the original Rikitake two-disk dynamo in order to stabilize chaotic behavior of the Rikitake two-disk dynamo. Numerical simulations by using the modified Rikitake two-disk dynamo were carried out. The phase diagram as a function of the coupling constant and the delay time was obtained.

Key Words : Controlling Chaos, Rikitake Dynamo, Geomagnetic Reversals, Delayed Feedback

1 はじめに

最近、カオスを制御しようとする研究が多くなされるようになってきた [1]-[3]。カオスはいたるところに存在し、比較的容易につくりだせることがわかってきている。このような非線形現象に支配されたカオスをじゃまものとしてあつかうのではなく、カオス軌道の近傍には無限個の周期軌道が存在することに注目し、ちいさな擾乱を与えることによりカオス軌道を周期軌道にコントロールしようとする考えである [1]。また、カオス制御という考えを自然界の現象（エルニーニョ現象）の説明に用いようとする試みもなされている [4]。自然界にみられるカオス現象の一つに地球磁場の逆転現象を挙げることができる。ここでは、自然界が自分自身でカオス制御をおこなっているのではないかという視点から力武ダイナモのカオス制御をおこなうことにより地球磁場の逆転現象の解明を試みる。

古地磁気の研究により地球の磁場が何回も逆転していることがわかっている。火山岩が Curie 温度以下に冷却され固化するとき、そのときの地球の磁場方向に帯磁（永久磁石になる）する。つまり、火山岩は冷却したときの地球磁場のレコーダーになる。海嶺で新たに生み出された海洋プレー

*応用物理学科

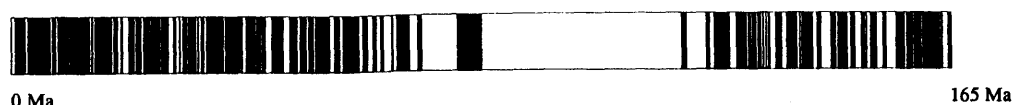


図 1: 地球磁場逆転の観測データ

トは、プレート運動によりほぼ一定のレートで成長し移動していく。海洋プレートに記憶された古磁場を解析した結果から、現在の北が過去には南であったり（逆転）また現在と同じであったりと地球の磁場は過去に何度も入れ代わっていることが明らかにされたのである。

地球磁場の逆転現象を説明することは、地球物理学におけるもっとも興味深いテーマの一つである [5]–[10]。地球磁場の逆転現象は、カオス的であることがわかっている。地球磁場のカオティックな逆転現象を説明するモデルとして力武が提案した 2 つのカップルしたダイナモモデル（力武ダイナモ）がある [5]。力武ダイナモは、1958 年に提案され、低次元の常微分方程式でカオスを示した研究として最初のもの一つ（カオスの研究でもっとも有名な方程式である Lorenz model が提案されたのが 1963 年であることを考えると 5 年ほど早い）である。力武ダイナモによって、地球の古磁場の解析から得られた地球磁場の逆転時系列のカオティックな挙動を比較的うまく説明することができる。しかしながら、約 7000 万年から 1 億 2000 万年の間にはほとんど磁場の逆転はおこっておらず地球磁場の逆転現象に関しては非常に静かな時期（静穏期）が長く存在したことが知られている。このような、磁場の逆転がおこらない静かな時期の存在は力武ダイナモでは説明できない。そこで、力武ダイナモに delayed feedback 制御を導入したモデルを考察し、静穏期の存在の説明を試みる。

2 地球磁場逆転の観測データ

70 万年前には、地球磁場が逆転していたことが古地磁気学の研究から分かっている。古地磁気学とは、岩石の磁場を測定することによって、岩石が形成された時代の地球磁場を明らかにしようとする学問である。岩石には磁性鉱物が含まれており永久磁石としての性質をもっているため、岩石は、岩石が形成されたときの磁場の方向を記録している。火山岩の場合は、Curie 温度以下に冷却されたときの磁場の方向が記録され、堆積岩の場合は、鉱物が降り積もったときの磁場の方向が記録される。

海洋プレートは、一定の速度（年数 cm のオーダー）で海溝に沈みこんでいる。この沈みこむ速度は一定であると考えられるので、海洋プレートが新たに生成される海嶺からの距離によって正確に年代を決定することができる。海嶺の深部できたときの海洋プレートの温度は Curie 温度以上であり、上昇するにしたがって Curie 温度以下に冷却され、そのときの地球磁場を記録する。つまり、海洋プレートは、テープレコーダーのように地球磁場を記録している。海洋プレートの磁化を解析することによって、地球磁場の逆転に関する詳細なデータが得られている。図 1 は、地球磁場が現在と同じ向きであった時期と逆転していた時期を示したものである（Harland et al. (1982) によってまとめられたデータ [8] をプロットした）。ただし、Ma は 100 万年を意味する。現在と同じ極性

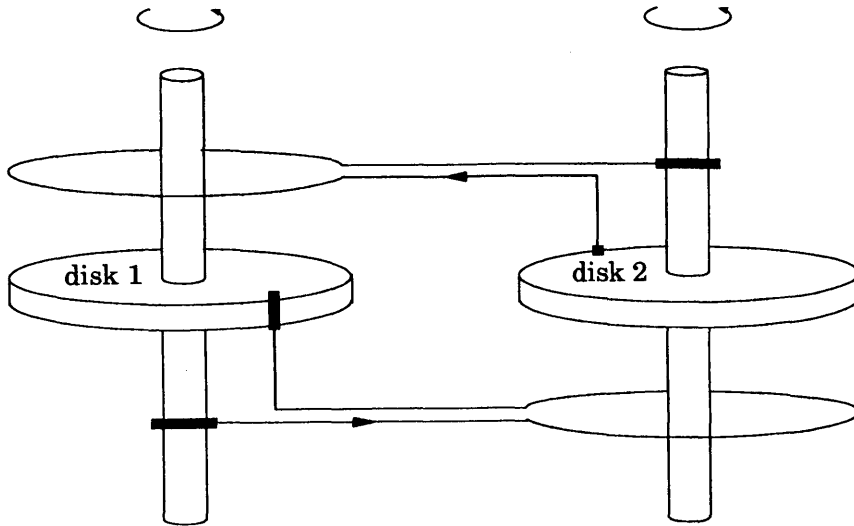


図 2: 力武ダイナモの模式図

をもっている正常期 (normal period) を白抜きで、現在の極性とは反対の逆転期 (reverse period) を黒塗りで示している。1 億 6500 万年以前のデータが示されていないのは、それ以前に形成された海洋プレートはすでに海溝に沈みこんでしまったためにデータを得ることができないからである。地球磁場逆転の時系列の特徴は、磁場の逆転はカオティックに起こっていることと、約 7000 万年から 1 億 2000 万年前のほとんど地球磁場の逆転が起こらない時期（8293 万年から 1 億 1821 万年前の期間にはまったく逆転が起っていない）が存在することである。

3 力武ダイナモ

地球磁場のカオティックな逆転現象を説明するためのモデルとして力武ダイナモがある [5]。図 2 に力武ダイナモの模式図を示す。力武は、二つの円盤ダイナモをカップルさせることによって、カオティックな地球磁場逆転を説明することのできるモデルの提案に成功した。力武ダイナモは、

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= -\mu x(t) + y(t)z(t) \\
 \frac{dy(t)}{dt} &= -\mu y(t) + x(t)(z(t) - a) \\
 \frac{dz(t)}{dt} &= 1.0 - x(t)y(t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

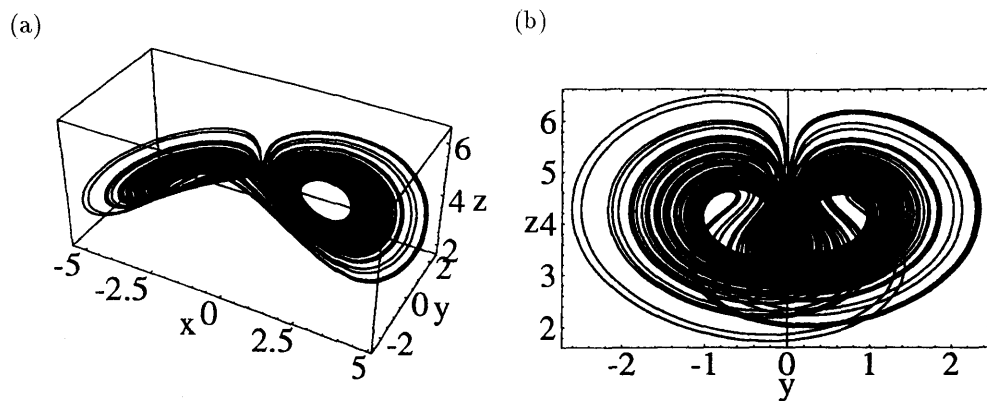


図 3: 力武ダイナモ (a) xyz 相空間での解軌道、(b) yz 相平面での解軌道

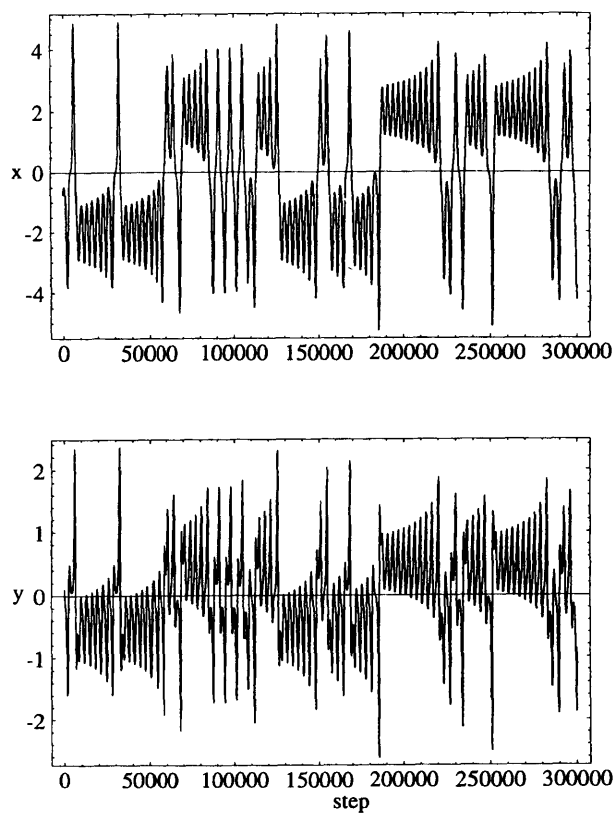


図 4: 力武ダイナモの x および y の時系列

の3つの変数がカップルした非線形の3元連立常微分方程式によって与えられる。変数 (x, y, z) はそれぞれ、大雑把には円盤1に流れる電流、円盤2に流れる電流、回転する円盤1の角速度に対応している。ここで、 μ および a は定数である。力武ダイナモの時間微分が零に等しいと置くことにより、特異点（定常解：不安定固定点）を得ることができる。

$$\begin{aligned} x &= \pm K \\ y &= \pm K^{-1} \\ z &= \mu K^2 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $a = \mu(K^2 - K^{-2})$ である。安定性解析によると [6]、全てのパラメータに対して上の定常解は不安定であることが示されている。

パラメータの値を $\mu = 1.0$ 、 $K = 2.0$ ($a = 3.75$) として、力武ダイナモの数値シミュレーションを4次の Runge-Kutta 法 [11] を用いておこなった。図3に (a) xyz 相空間での数値解の軌道と、(b) yz 相平面に投影した数値解の軌道を示す。ここでは、 $(y = \pm \frac{1}{2}, z = 4)$ が特異点である。解は、特異点のまわりに巻きついている様子がわかる。また、力武ダイナモはダブルスクロール型の Lorenz モデルと良く似たストレンジアトラクターをもっていることもわかる。図4に x と y の時間発展を示す。図4から振動が成長していき、極性が反転する様子がみれる（例えば、 x に注目すると、 x は正の値と負の値を行き来している。ここで、正の時期を normal period、負の時期を reverse period に対応させると地球磁場の複雑な逆転に対応させることができる）。力武ダイナモは、図1に示した地球磁場のランダムな逆転現象をうまく説明している。

4 カオス制御

いままでに見てきたように、力武ダイナモは、ランダムに逆転する地球磁場の性質を再現することには成功している。しかしながら、力武ダイナモにおいては、すべてのパラメータに対して特異点不安定であることから、常に極性の反転がおこってしまい、図1に示した観測データに見られるような長期間の地球磁場の逆転がおこらないような静穏期を再現できない。そこで、カオス制御という観点から力武ダイナモをとらえなおすを試みる。

力武ダイナモは地球の核での溶けた鉄の複雑な流体運動を総合し簡略化したものである。それゆえ、複雑な核での流体運動によって時間遅れ項が現れたとしてもそれほど不自然ではない。ここでは、時間遅れ項が存在するとどのようになるかをみていく。ここで、改良した力武ダイナモを

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -\mu x(t) + y(t)z(t) + C(x(t-\tau) - x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\mu y(t) + x(t)(z(t) - a) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= 1.0 - x(t)y(t) \end{aligned} \quad (3)$$

としよう。カオス制御という観点からみると delayed feedback 制御の項 $u(t)$ 、

$$u(t) = C(x(t-\tau) - x(t)) \quad (4)$$

をつけくわえたことに相当する [2]。パラメータ C は、制御の強さを意味し、 C が大きいときは強い制御をおこなっていることになり、 C が小さいときは弱い制御をおこなっていることになる。 τ は時間遅れの大きさを表す。 $C = 0$ あるいは $\tau = 0$ のときは、制御項 = 0 となり制御をしていないのと等しくなる。

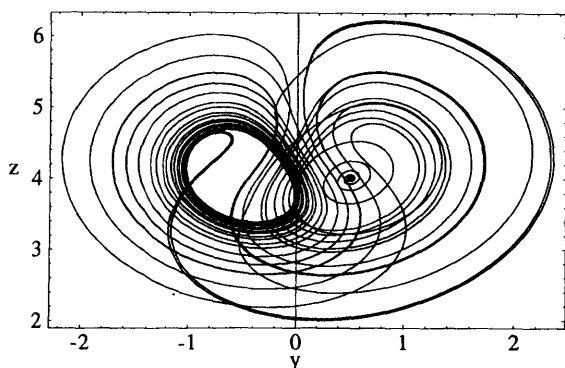


図 5: yz 相平面での解軌道 ($C = 1.0, \tau = 1,500$)

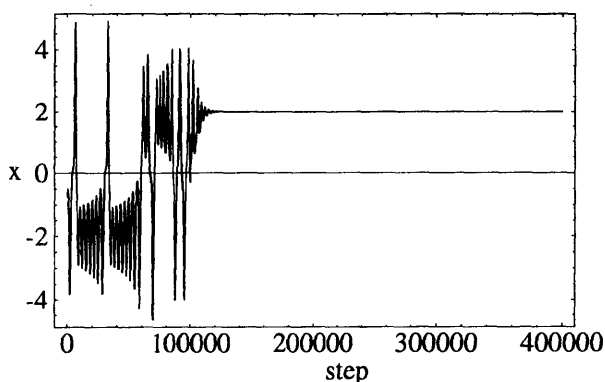


図 6: x の時系列 ($C = 1.0, \tau = 1,500$)

5 数値シミュレーションの結果

delayed feedback 制御項のパラメータ C, τ をかえて、4 次の Runge-Kutta 法を用いて数値シミュレーションをおこなった。Runge-Kutta 法での時間ステップは、 $h = 0.001$ でおこなった。 $C = 1.0, \tau = 1,500$ を用いてシミュレーションをおこなった結果を示す。制御は、時間ステップ $t = 100,000$ から始めた。図 5 は数値解を yz 相平面に投影したものである。特異点の一つ $(\frac{1}{2}, 4)$ に解軌道が収束していく様子がわかる。図 6 は、そのときの x の時系列である。制御が始まってすぐに特異点に収束していくのがわかる。以降、 x の値は、正の領域 ($x = 2.0$) に留まり、負の領域に反転することはない。つまり、特異点に収束して、静穏期（長時間にわたり極性が反転しない時期）を再現できている。

さらに、パラメータの値 $C = 0.05, \tau = 1,500$ を用いてシミュレーションをおこなった結果を図 7、図 8 に示す。 $C = 0.05$ という弱い制御でもカオス挙動を安定に特異点に制御できることがわかった。しかし、 $C = 1.0$ の場合と同じように、時間ステップ $t = 100,000$ から制御を開始したにもかかわらず、 $t = 200,000$ 付近までは制御項が無いようにふるまい、その後も特異点に収束するまでには、多くの時間ステップを必要としている。 $t = 200,000$ から振動しながら特異点に収束し始め

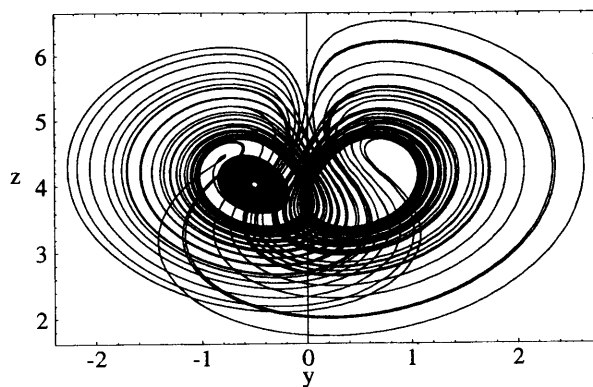


図 7: yz 相平面での解軌道 ($C = 0.05, \tau = 1,500$)

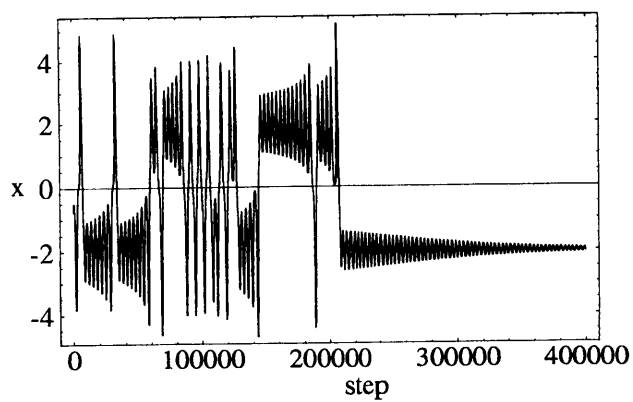


図 8: x の時系列 ($C = 0.05, \tau = 1,500$)

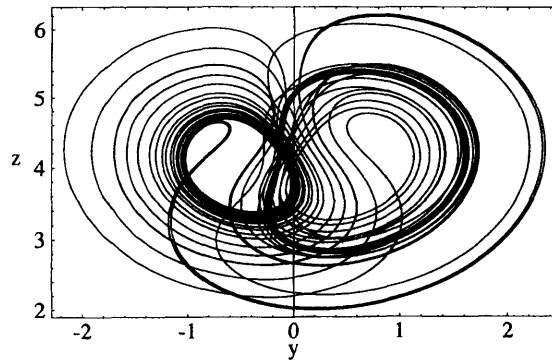


図 9: yz 相平面での解軌道 ($C = 1.0, \tau = 3,000$)

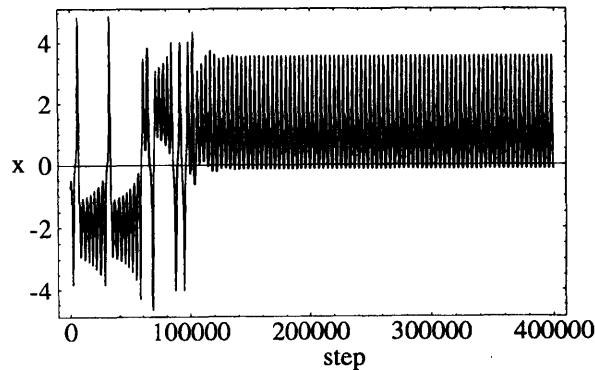


図 10: x の時系列 ($C = 1.0, \tau = 3,000$)

るが、その速度は非常に遅く、 $t = 400,000$ においても完全には収束しない（制御を始めてから時間ステップが 300,000 ステップ経過してもまだ小さな振動がみられる）。

次に、時間遅れ τ を変えるとどのようなことがおこるかをみていこう。 $\tau = 1,500$ という値は、図 4 の力武モデルの数値シミュレーションでの小さな振幅の振動周期に近い値である。その 2 倍の $\tau = 3,000$ 、 $C = 1.0$ でシミュレーションをおこなった結果を図 9、図 10 に示す。この場合は、特異点に収束するのではなく、周期解（limit cycle）に収束していく様子を見ることができる。なお、 $\tau = 1,500$ の場合とは異なり、 $\tau = 3,000$ では、 $C = 0.05$ というような弱い制御ではカオティックな挙動は、特異点あるいは周期解には制御できなかった。

パラメータ (C, τ) の関数として、解がどのようなふるまいをするかに関する相図を作った。図 11 に相図を示す。 C が小さいときは、カオス的な挙動をおさえることができない。また、delayed feedback 項 $u(t)$ を加えない力武ダイナモにみられる小さな振幅変動の振動周期 $\tau \sim 1,500$ 近傍（図 4 参照）では、比較的小さな値でカオス運動は安定化（制御）されるのがわかる。また、パラメータの値により周期的な振動解に制御されていくものもみられる。 $\tau = 2500$ 以上では、特異点に収束するのではなく、周期解（limit cycle）に収束するようになる。

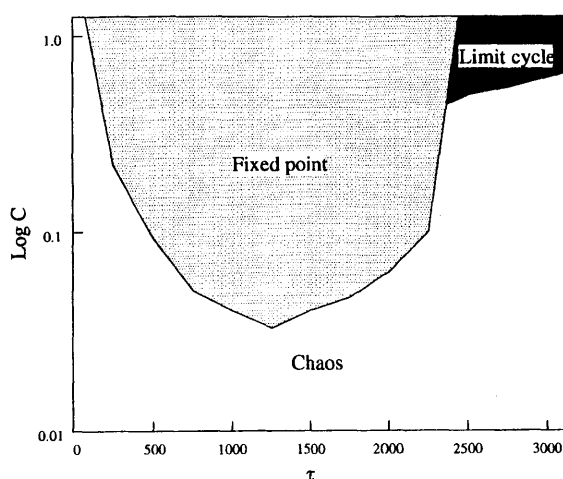


図 11: (C, τ) の関数としたときの相図

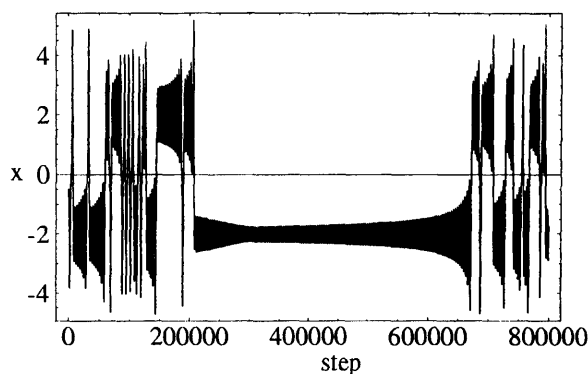


図 12: 制御をオン・オフしたときの x の時系列 ($C = 0.05, \tau = 1,500$)

6 まとめ

自然界自身がカオス制御をおこなっているのではないかという観点から、delayed feedback 項を導入した改良力武ダイナモの数値シミュレーションによる研究をおこなった。delayed feedback 制御項 (4) 式のパラメータ (C, τ) に関して相図を得ることができた。カオス制御という観点にたつて、力武ダイナモのカオティックな挙動の制御に成功した。その結果、地球磁場の逆転現象にみられる静穏期の再現に成功することができた。図 12 に、 $C = 0.05, \tau = 1,500$ で、時間ステップ $t = 100,000 \sim 300,000$ の間だけ制御したとき ($t = 100,000$ で制御をオンし、 $t = 300,000$ になったときに制御をオフする) のシミュレーション結果を示す。時間ステップ $t = 200,000$ からカオティックな極性の反転がみられなくなり、長期にわたり極性が一定であった後、 $t = 650,000$ からまたカオティックな極性の反転が現れるようになるのを見ることが出来る。このように、弱い制御を短い間だけおこなうことにより、図 1 の観測データをよりうまく再現できるようになることがわかる。今回は、自然界自身がカオス制御をおこなっているという見方で自然界をみてみるとさまざまなことが見えてくる可能性を試し、地球磁場の逆転現象に関して新しい視点を与えることができた。

参考文献

- [1] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, "Controlling Chaos", *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 1196-1199 (1990).
- [2] K. Pyragas, "Continuous control of chaos by self-controlling feedback", *Physics Letters A*, **170**, 421-428 (1992).
- [3] 潮俊光, "カオス制御", 朝倉書店, 104 pp. (1996).
- [4] E. Tziperman, H. Scher, S.E. Zebiak and M.A. Cane, "Controlling Spatiotemporal Chaos in a Realistic El Niño Prediction Model", *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 1034-1037 (1997).
- [5] T. Rikitake, "Oscillations of a system of disc dynamos", *Proc. Camb. Phil. Soc.* **54**, 89-105 (1958).
- [6] A. E. Cook and P.H. Roberts, "The Rikitake two-disc dynamo system", *Proc. Camb. Phil. Soc.* **68**, 547-569 (1970).
- [7] 力武常次, "地球磁場とその逆転-70 万年前磁石は南をさしていた！-", サイエンス社, 236 pp. (1980).
- [8] W.B. Harland, A.V. Cox, P.G.Llewellyn, C.A.G.Pickton, A.G.Smith and R. Walters, "A geologic time scale", Cambridge University Press, 131 pp. (1982).
- [9] B. Schwarzschild, "Do asteroid impacts trigger geomagnetic reversals ?", *Physics Today*, 17-20 (1987).
- [10] D.L. Trucotte, "Fractals and chaos in geology and geophysics", Cambridge University Press, 221 pp. (1992).
- [11] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, "Numerical Recipes in C", 日本語訳 丹慶勝市・奥村晴彦・佐藤俊郎・小林誠, 技術評論社, 685 pp. (1993).